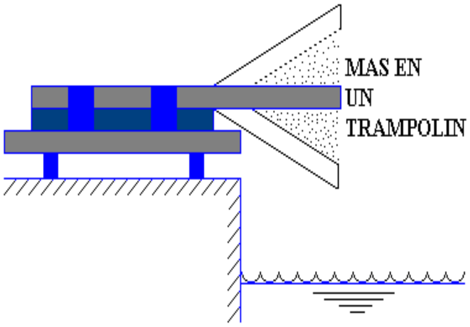
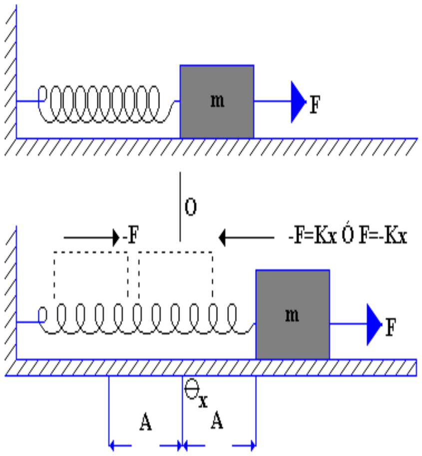
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

En nuestra vida cotidiana con frecuencia se puede observar que existe otro tipo de movimiento, por ejemplo: el péndulo del reloj de tu casa, una sierra eléctrica, un cepillo de dientes eléctrico, la aguja en el cuadrante de una báscula mientras llega al equilibrio para dar la lectura de tu masa corporal, el movimiento de una hamaca y mecedora, el badajo de la campana de tu iglesia, el trampolín de la alberca cuando te lanzas de él, la cuerda elástica del bungee en los centros recreativos, el funcionamiento de la suspensión de un automóvil, el aleteo de un colibrí o de una abeja, etc. A estos movimientos se les conoce como movimientos oscilantes o vibratorios.



M. A. S. en un trampolín



Movimiento de un resorte

La característica más fácilmente reconocible del movimiento oscilatorio es que resulta periódico, es decir, el objeto va y viene en su misma trayectoria pasando por un punto medio. Por lo tanto, una oscilación o vibración, comprende un movimiento hacia atrás y hacia delante. El tiempo que dura cada repetición se denomina ***período.***

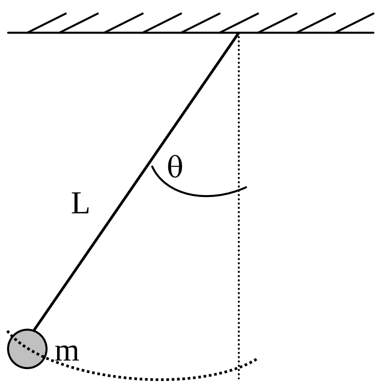
En el medio ambiente que nos rodea, existen todo tipo de movimientos simples o complejos, que se repiten a intervalos regulares de tiempo recorriendo una trayectoria varias veces entre dos puntos después de un intervalo definido, a estos movimientos que satisfacen estas características se les llama:

MOVIMIENTO PERIODICO Todo movimiento simple o complejo que se repite a intervalos regulares de tiempo sobre una trayectoria.

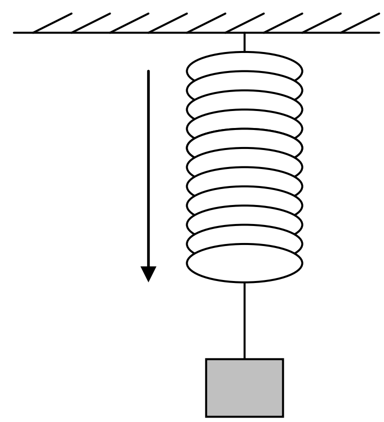
Los cuales se clasifican en:

1. El péndulo simple
2. El movimiento de un resorte

Ejemplos de movimientos periódicos:



Péndulo simple



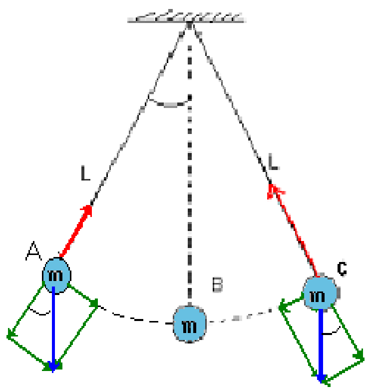
Movimiento de un resorte

MOVIMIENTO PENDULAR:

El movimiento que realiza el péndulo simple, es una forma del MAS.

PÉNDULO SIMPLE: Es un instrumento constituido por un cuerpo pesado suspendido en un punto sobre un eje horizontal por medio de un hilo de masa no considerada y realiza movimientos de un lado a otro.

Cuando se separa un péndulo de su posición de equilibrio y después se suelta, oscila a uno y otro lado del mismo por efecto de su peso. Al movimiento de ida y vuelta se le llama *oscilación*. El tiempo que tarda en dar una oscilación se le nombra período. Por lo tanto el número de vibraciones ejecutadas en la unidad de tiempo se conoce como *frecuencia*.



Movimiento periódico representado por el péndulo simple.

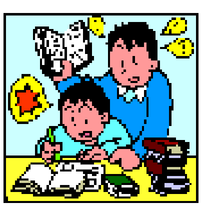
Para el péndulo simple el período se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Además: $\boxed{f = \frac{1}{T} \qquad \left(\frac{1}{s} = Hertz = Hz\right)}$

Donde:

π = valor aproximado = 3.1416
T = Período (s)
L = Longitud del péndulo (m)
g = Aceleración de la gravedad = 9.81 m / s^2 = 32 ft / s^2
f = Frecuencia de vibración = $\frac{No. de vibraciones}{s} = \frac{No. de ciclos}{s} = \frac{No. de vueltas}{s}$



EJERCICIOS RESUELTOS:

1. ¿Cuál es la longitud de un péndulo cuyo período es de 2 s, en el sistema internacional y sistema inglés?

Datos: **Fórmula:** **Desarrollo:**

L = ¿

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T = 2 s

Despejando L elevando la ecuación al cuadrado:

$g = 9.8 m/s^2$

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{(9.81\ m/s^2)(2\ s)^2}{4\,(3.1416)^2} = 0.994\ m$$

Para el sistema inglés: $g = 32\ ft/s^2$, nos da:

$$L = \frac{(32\ ft/s^2)(2\ s)^2}{4\,(3.1416)^2} = 3.24\ ft$$

2. Calcula la aceleración de la gravedad en un lugar donde un péndulo simple de 150 cm de longitud efectúa 100 oscilaciones en 245 s.

Datos:	**Fórmula:**	**Desarrollo**
g =?	$T = \dfrac{tiempo}{número de oscilaciones}$	$T = \dfrac{245s}{100} = 2.45s$
L = 150 cm = 1.5 m	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$	$g = \dfrac{4(3.1416)^2(1.5m)}{(2.45s)^2} = 9.85\dfrac{m}{s^2}$
t = 245 s	$g = \dfrac{4\pi^2 L}{T^2}$	**g = 9.85 m/s**
n = 100 oscilaciones		

3. Calcular el periodo de oscilación de un péndulo simple en Marte, si tiene una longitud de 50 cm. El peso de los objetos en Marte es de 0.40 veces el peso en la Tierra.

Datos :	**Fórmula:**	**Desarrollo:**
T =?	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$	$T = 2(3.1416)\sqrt{\dfrac{0.5m}{3.92\dfrac{m}{s^2}}}$
L = 50 cm = 0.5 m		
$g_M = 0.40(9.8 m/s^2) = 3.92\ \dfrac{m}{s^2}$		**T= 2.24 s**

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Hallar el período de un péndulo de longitud L = 3.24 ft, en la Luna donde la aceleración de la gravedad es de un sexto de la de la Tierra.

R. 4.88 s

2) Sobre la superficie de la Luna, la aceleración de la gravedad es tan solo de 1.67 $m/s^{2.}$, si un reloj de péndulo ajustado para la Tierra se transporta a la Luna ¿Qué porcentaje de su longitud, que tenia en la tierra deberá ser la nueva longitud del péndulo en la Luna, para que el reloj mantenga su posición?

R. 17%

3) ¿Cuáles son el período y la frecuencia de un péndulo simple cuya longitud es de 1.5 m?

R. 2.46 s; 0.41 Hz.

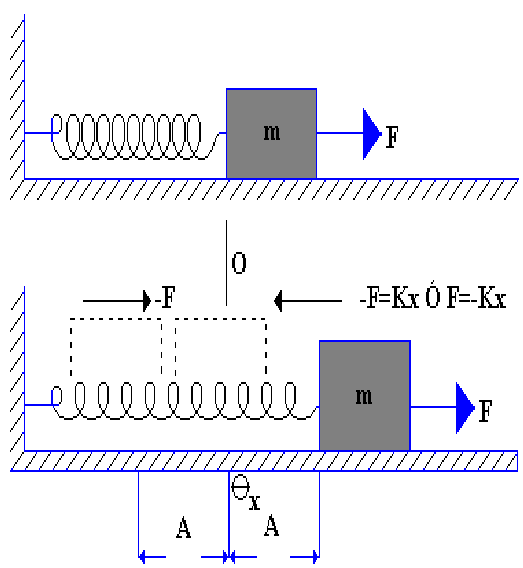
4) ¿Qué constituye una vibración completa de un péndulo?
5) El péndulo de un reloj se mueve muy lentamente, por lo tanto, se atrasa. ¿Qué ajuste se debe hacer?
6) ¿Cómo varía el período de un péndulo simple si aumenta su longitud?

La energía se propaga también a través del espacio y de la materia por medio de vibraciones. El sonido, la luz, las ondas de radio, etc., solamente se pueden explicar comprendiendo lo que es el movimiento ondulatorio, es decir, cómo se forman, se comportan y se propagan las ondas.

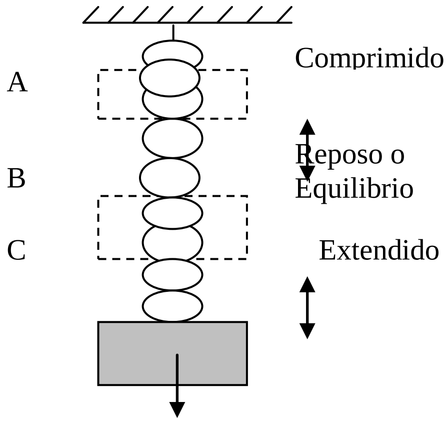
MOVIMIENTO DE UN RESORTE O MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS):

Es un movimiento periódico que tiene lugar en ausencia de fricción y se produce por una fuerza de restitución que es directamente proporcional al desplazamiento y tiene una dirección opuesta a este.

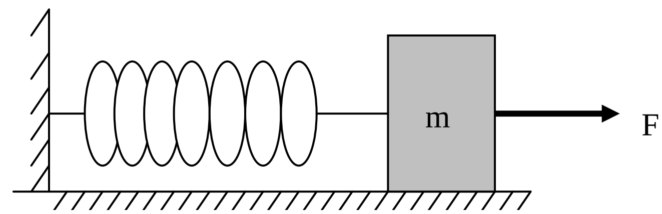
Movimiento de un resorte



Los cuerpos vibrantes siguen un movimiento armónico simple (MAS.). El MAS es un fenómeno físico que se presenta en un sistema formado por un resorte al que se le sujeta una masa en uno de sus extremos. Este sistema masa-resorte, produce un movimiento periódico en forma vertical, horizontal o inclinada, como se muestra en la siguiente figura:



a) Movimiento vertical de un sistema masa-resorte

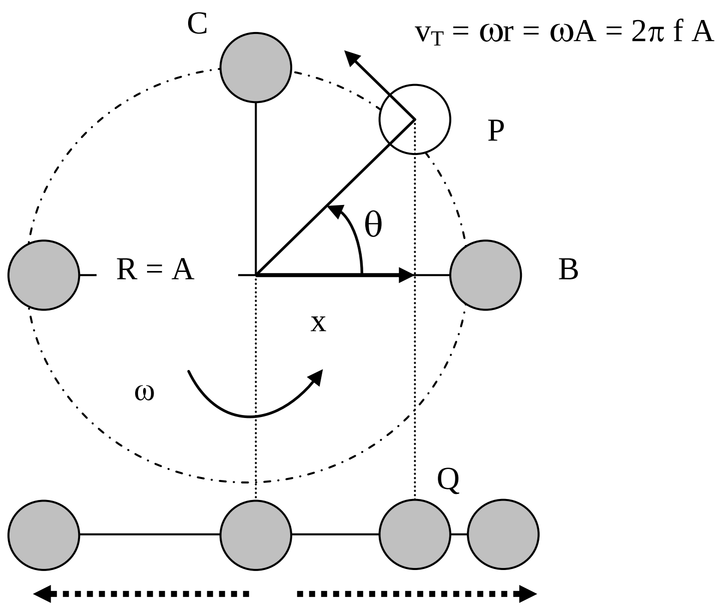


b) Movimiento horizontal de un sistema masa-resorte

***Ecuación del desplazamiento producido en el MAS**. (x).*

Cuando un cuerpo se mueve en una trayectoria circular, su proyección lineal se mueve con MAS, por lo que es necesario aplicar las ecuaciones del movimiento circular uniforme al círculo de referencia mostrado en la siguiente figura, a partir de la posición **P** del objeto.

El movimiento circular y su proyección lineal que se mueve con un MAS, permite determinar su desplazamiento **x**.



Si la velocidad lineal v_T y la velocidad angular ω del punto de referencia P son constantes, entonces la proyección Q se moverá de un lado a otro con un MAS. De esta manera se puede obtener la ecuación del desplazamiento x de la proyección Q. Sabemos que:

$$\cos\theta = \frac{X}{A} \quad \Rightarrow \quad X = A\cos\theta$$

Además, del movimiento circular: $\omega = \frac{\theta}{t} \quad \Rightarrow \ \theta = \omega t$ y $\omega = 2\pi f\, t$

Con el que se determina el desplazamiento (x) del MAS:

$$\boxed{X = A\cos\theta = A\cos\omega t = A\cos 2\pi\, f\, t}$$

Donde:

x = desplazamiento en el MAS (m ó cm); siempre se mide a partir del origen

A = amplitud (m ó cm)

f = frecuencia (Hz.)

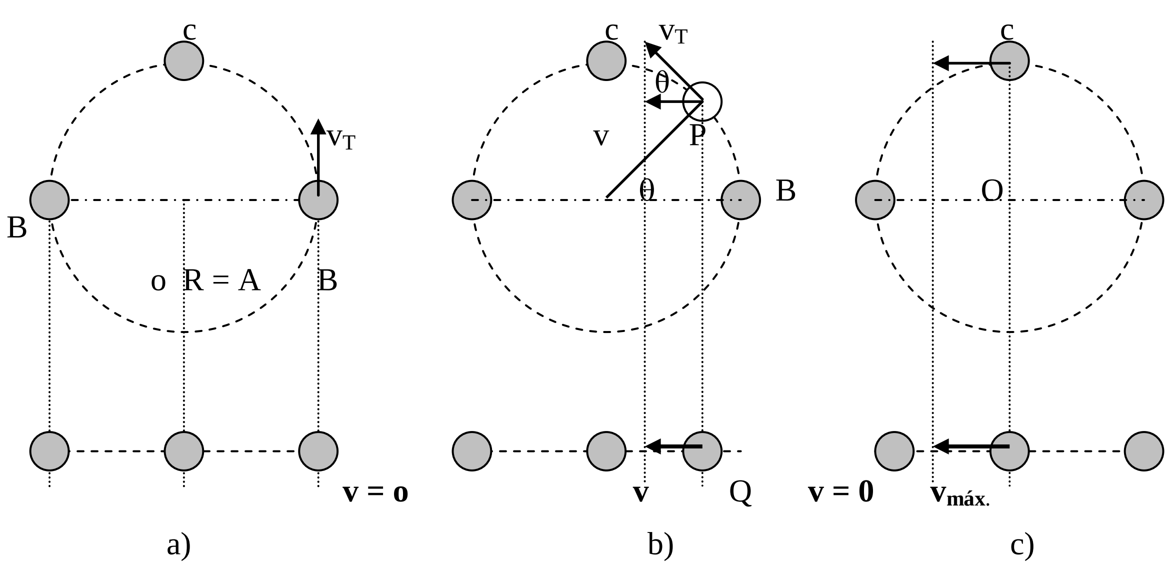
t = tiempo (s)

Ecuación de la velocidad del MAS (v)

Consideráremos a un cuerpo que gira con un MAS. bajo la influencia de una fuerza de recuperación, a partir de 3 instantes, como se muestra en los círculos de referencia de la siguiente figura:

Sabemos que:

$$v_T = \omega A = 2\pi f A$$



La figura anterior muestra la velocidad de un cuerpo que vibra, la cuál deber ser cero cuando su desplazamiento es máximo (a), y máxima en el centro de oscilación donde el desplazamiento es cero (c). Para obtener la ecuación de la velocidad en el MAS, consideremos el punto P, de la anterior figura en el inciso (b).

$Sen\ \theta = \frac{V}{V_T}$, despejando $\mathbf{v = - v_T\ Sen\ \theta}$

Como: $\theta = \omega t = 2\pi\ f\ t$, entonces: $V = -V_T sen\omega t = -V_T sen 2\pi f\ t$ además,

$V_T = 2\pi fA$, por lo que la velocidad resulta: $\mathbf{v = - 2\pi f A\ Sen\ 2\pi f\ t}$

De la fórmula de la velocidad, si $\theta = 90º$, entonces: la velocidad máxima:

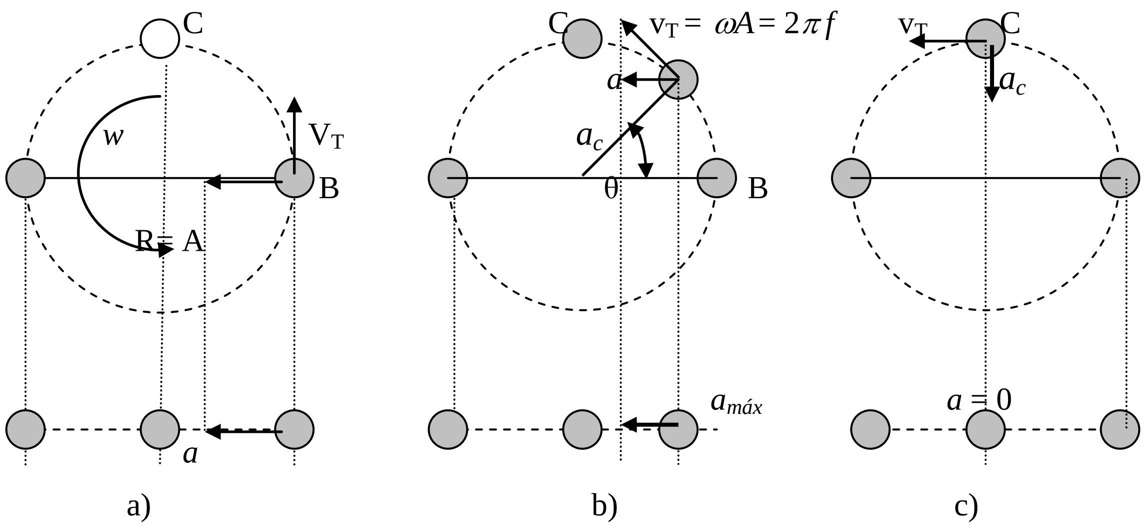
$v = v_{máx.}$, por lo que: $\mathbf{v_{máx.} = 2\ \pi\ f A}$

Nota: sen θ, es negativo cuando está abajo del diámetro de referencia.

Ecuación de la aceleración en el MAS (a).

La velocidad de un cuerpo que vibra no es constante, por lo que la aceleración juega un papel importante. Como podemos observar en la siguiente figura, la velocidad de un cuerpo que vibra es cero en la posición de desplazamiento máximo, es en este instante cuando el cuerpo está sometido a la máxima fuerza de recuperación, por lo tanto, la aceleración del cuerpo es máxima cuando su velocidad es cero.

A continuación, demostraremos que la aceleración a de una partícula que se mueve con MAS, es igual a la componente horizontal de la aceleración centrípeta a_c



Círculo de referencia para determinar la aceleración en el MAS.

Sabemos que: $\theta = \omega t$; $w = 2\pi f$; $a_c = \omega^2 r$, como r = A, entonces $a_c = \omega^2 A$

Además: x = A Cos θ $\Rightarrow$ Cos $\theta = Cos\ 2\pi\ f\ t = \frac{X}{A}$. De la figura anterior,

Inciso (b), obtenemos: $Cos\ \theta = \frac{a}{a_c}$, despejando *a*, $a = -a_c\ Cos\ \theta$, sustituyendo,

$$a_c = \omega^2 r \quad \text{y} \quad Cos\ \theta = \frac{X}{A}. \text{ Se obtiene: } a = -(2\pi f)^2 (A)\left(\frac{X}{A}\right) \Rightarrow$$

La ecuación para la aceleración del MAS, es:

$$\boxed{a = -4\pi^2 f^2 X = -4\pi^2 f^2 A\ Cos\ \theta = = -4\pi^2 f^2 A\ Cos\ wt = -4\pi^2 f^2 A\ Cos 2\pi ft}$$

Nota: La aceleración es directamente proporcional al desplazamiento y opuesta a la dirección de éste.

Si θ *= 0° o 180°, a es la aceleración máxima:*

$$\boxed{a_{max} = 4\pi^2 f^2 A}$$

A partir de la ecuación anterior, obtenemos las fórmulas de la frecuencia y el período de vibración.

Como: $a = -4\pi^2 f^2 X \Rightarrow \frac{a}{-4\pi^2 X} = f^2$, despejando *f*, se obtiene:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{a}{x}} \qquad \text{y} \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{a}}$$

Debido a que el desplazamiento y la aceleración son siempre opuestos, la relación $\frac{-x}{a}$ será siempre positiva.

Cuando se trata de un resorte que vibra, es conveniente expresar el período como una función de la constante del resorte y de la masa del cuerpo que vibra, a partir de la segunda ley de Newton y de la ley de Hooke como sigue:

F = m *a* y F = - k x, igualando ambas fórmulas.

m *a* =- k x $\Rightarrow$ $a = -\frac{K X}{m}$, como: $a = -4\pi^2 f^2 X$, $\Rightarrow$

$$-4\pi^2 f^2 X = -\frac{K X}{m} \Rightarrow f^2 = \frac{-K X}{-4\pi^2 X m} = \frac{K}{4\pi^2 m} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

y para el período se tiene: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

Es importante hacer notar que el período y la frecuencia para un resorte, dependen únicamente de la constante del resorte y de la masa del cuerpo que vibra.

Energía del movimiento armónico simple

Cuando un cuerpo oscila unido a un resorte, posee energía cinética y energía potencial, las cuales varían con el tiempo. La suma de estas energías, es la energía total, la cual es constante.

La energía potencial almacenada en el resorte estirado o comprimido, se obtiene de la siguiente manera:

E_P = F s, para el resorte: E_P = F x, además, F = k x,

Donde:

E_P = energía potencial

F = fuerza promedio = $\frac{F}{2}$

x = desplazamiento del resorte

K = constante de proporcionalidad del resorte

Por lo que: $E_P = \frac{F\,X}{2} = \frac{K\,X}{2}X = \frac{K\,X^2}{2} = \frac{1}{2}K\,X^2 \quad \Rightarrow \quad E_P = \frac{1}{2}K\,X^2$

La energía cinética de la masa **m** que oscila en un resorte se obtiene como:

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v^2$$

La energía mecánica total E_T se obtiene de la suma de ambas energías:

$E_T = E_P + E_C \qquad E_P = \frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}K\,X^2$

Cuando el desplazamiento es máximo, x = ± A, la masa está instantáneamente en reposo (v = 0) y toda la energía es potencial, es decir:

$$E_T = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}K(A)^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_T = \frac{1}{2}K\,A^2$$

Donde:

E_T = energía total en el MAS (J)

A = amplitud (m)

K = constante de proporcionalidad del resorte (N /m)

Esta es una propiedad general del MAS; ***la energía total de un objeto que oscila con un M.A.S., es proporcional al cuadrado de la amplitud.***

De la anterior ecuación, se puede expresar la velocidad en función de la posición x del M.A.S..

Si: $E_T = \frac{1}{2} K\ A^2 \qquad E_C = \frac{1}{2} m\, v^2 \qquad E_P = \frac{1}{2} K\ X^2$

$E_T = E_P + E_C$, nos da: $\frac{1}{2} K\ A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K\ X^2$

Despejando la velocidad ***v***, obtenemos:

$\frac{1}{2} K\ A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K\ X^2$ Multiplicando todo por dos, nos da:

$$K\ A^2 = m v^2 + K\ X^2 \quad \Rightarrow \quad K\ A^2 - K\ X^2 = m v^2 \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{K\left(A^2 - X^2\right)}{m}}$$

Obsérvese que cuando el desplazamiento es máximo, x = A, la velocidad v = 0, la masa está instantáneamente en reposo. De la misma manera cuando la masa que oscila pasa a través del punto de equilibrio, (x = 0), la $E_p = 0$, en ese instante toda la energía es cinética ($E_T = E_C$) y la masa se mueve con su velocidad máxima.

De la misma manera la aceleración se puede obtener de: $F = m\ a$, y $F = -\ k\ x$

Igualamos ambas ecuaciones, entonces: m $a = -\ k\ x \Rightarrow a = -\ k\ x\ /\ m$

Para x = A, tendremos: $a_{\text{máx}} = -\frac{K\ A}{m}$

Nota: El signo negativo que aparece en la ley de Hooke se debe a que la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento (fuerza de restitución). Si tomamos **x** positivo cuando el desplazamiento es a la derecha, la fuerza será negativa (hacia la izquierda), si **x** es negativo (hacia la izquierda) la fuerza será positiva (hacia la derecha).

La aceleración es proporcional al desplazamiento y de sentido opuesto, ésta característica permite identificar sistemas que presenten movimiento armónico simple (MAS).

Cuando la aceleración sea proporcional al desplazamiento y tenga sentido opuesto, habrá movimiento armónico simple.

EJERCICIOS RESUELTOS:

Nota: Para utilizar las ecuaciones del MAS, te debes asegurar de ajustar la calculadora para leer ángulos en radianes (rad), de la misma manera no tratar de redondear los números antes de tener la respuesta final, ya que, un pequeño error en la medida en radianes es significativo.

1. Una masa m oscila con un MAS de frecuencia 3 Hz y una amplitud de 6 cm. ¿Qué posiciones tiene cuando el tiempo es de t = 0 y t = 2.4 s?

Datos: **Fórmula:** **Desarrollo:**

f = 3 Hz $x = A \cos \theta = A \cos \omega t$

A = 6 cm $x = A \cos 2 \pi f t$ a) para t = 0

x = ?   x = (6cm) cos 2(3.1416)(3 1/s)(0)

$t_1 = 0$ x = (6 cm)cos (0 rad.)= 6 (1) cm = 6 cm

$t_2 = 2.4$ s

b) para t = 2.4 s

x = (6cm) cos 2(3.1416)(3 1/s)(2.4 s)

x = (6 cm)cos (45.238 rad)

x = 6 cm (0.309016) = 1.854

x = 1.854 cm

2. Una masa de 200 gr se encuentra suspendida de un largo resorte en espiral. Cuando se desplaza 10 cm, la masa vibra con un período de 2 s. (a) ¿Cuál es la constante del resorte? (b) ¿Cuáles son su velocidad y aceleración cuando se mueve hacia arriba hasta un punto que se encuentra a 5 cm sobre su posición de equilibrio?

Datos : **Fórmulas**

m = 200 g = 0.2 kg $F = -k x$

A = 10 cm = 0.1 m $v = -v_T \, sen\ \theta = -\omega A \, sen\ \omega t = -2\pi f A \, sen\ \theta$

T = 2 s $a = -a_C \cos \theta = -\omega^2 A \cos \omega t = -4\pi^2 f^2 A \cos 2\pi f t$

a) k = ? $a = -4\pi^2 f^2 A X \qquad Cos\ \theta = \frac{X}{A}$

b) v = ?

a = ?

Desarrollo:

a) Hallar la constante k del resorte

La fuerza que actúa sobre el resorte es la del peso del cuerpo suspendido, F = - m g, por lo que: F = - k x $\Rightarrow$ k = - F / x = - (- m g) / x

$$k = \frac{0.2\ kg\ (9.8\ m/s^2)}{0.1\ m} = 19.6\ N/m$$

k = 19.6 N / m

b) Para hallar la velocidad y aceleración se requiere conocer el ángulo correspondiente a la amplitud de 5 cm.

$$Cos\ \theta = \frac{X}{A} \quad \Rightarrow Cos\ \theta = \frac{5cm}{10cm} = 0.5\ rad$$

$\theta = \cos^{-1}(0.5) = \text{arc cos}(0.5) = \pi / 3 = 1.0472$ rad

$v = -2\pi f A \, sen\ \theta$

v = - 2 (3.1416) (0.5 1/s) (10cm) sen (1.0472)

v = - 27.2 cm / s
R. v = - 0.272 m / s

$a = -4\,\pi^2 f^2$ x

a = - 4 (3.1416)^2 (0.5 1/s)^2 (5cm) = - 49.35 cm / s^2

a =- 49.35 cm / s^2

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. Un deslizador unido a un resorte se estira hacia la derecha una distancia de 4 cm y luego se suelta. En 3 s regresa al punto donde se soltó y continúa vibrando con MAS (a) ¿Cuál es la velocidad máxima? (b) ¿Cuál es la posición y la velocidad después de 2.55 s?
R. a) v = 8.38 cm/s; b) x = 2.33 cm; v = 6.79 cm/s

2. Un objeto se mueve con un MAS de 16 cm de amplitud y una frecuencia de 2 Hz (a) ¿Cuál es la velocidad máxima y la aceleración máxima? (b) ¿Qué velocidad y que aceleración tiene después de 3.2 s?
R. a) v = 2.01 m/s; a = 25.27 m/s^2 ; b) v = – 1.18 m/s; a = 20.44 m/s^2

3. Un automóvil y sus pasajeros hacen una masa total de 1 600 kg. El chasis del auto se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno de ellos recibe una fuerza constante de 20 000 N/m. Calcula la frecuencia de vibración del auto cuando pasa por un tope en el camino.
R. f = 1.13 Hz.

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA:

Un cuerpo se mueve con MAS; ¿qué efecto tendrá duplicar la amplitud A sobre:
a) El periodo?
b) La velocidad máxima?
c) La aceleración máxima?

Dos objetos de masas iguales están unidos a resortes iguales a una amplitud de X_1= 10cm y X_2= 5cm respectivamente, ¿en qué tiempo alcanzan sus posiciones de equilibrio?

¿Cuál es el valor de la aceleración de un oscilador de amplitud A y frecuencia f? (a) cuando su velocidad es máxima, (b) cuando su desplazamiento es máximo.

ENERGÍA MECÁNICA